

UMA ABORDAGEM MESHFREE PARA SIMULAÇÃO DE PLASMAS NÃO-COLISIONAIS

Gleber N. Marques^{1*}, Airam J. Preto², Stephan Stephany² e Angelo Passaro³

1: Laboratório de Modelagem e Simulação Computacional de Alto Desempenho
Campus Regional de Alto Araguaia
Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT
Rua Santa Rita, nº 128, 78780-000, Alto Araguaia-MT, Brasil
e-mail: gleber.nmarques@gmail.com, web: <http://www.aia.unemat.br>

2: Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Centro de Tecnologias Especiais
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515, 12245-970, São José dos Campos-SP, Brasil
e-mail: {stephan,airam}@lac.inpe.br web: <http://www.lac.inpe.br>

2: Laboratório de Engenharia Virtual
Divisão de Física Aplicada
Instituto Estudos Avançados - IEAv
Rodovia dos Tamoios, km 5,5, São José dos Campos-SP, Brazil, 12228-001
e-mail: angelo@ieav.cta.br web: <http://www.efa.ieav.cta.br>

Palavras-chave: Meshfree Methods, Particle-In-Cell (PIC), Element-Free Galerkin Method (EFGM), Particle-In-Diffuse-Cell (PIDC), Simulação de Plasmas

Resumo. Neste trabalho propomos o método Particle-In-Diffuse-Cell (PIDC) para simulação de plasmas, fundamentado no modelo Particle-In-Cell (PIC) e no método Element-Free Galerkin (EFG), o qual vem sendo amplamente estudado em eletromagnetismo e magneto-hidrodinâmica. A inexistência de malha na formulação do método EFG conduz à generalização do conceito geométrico das células no modelo PIC, e nosso objetivo é explorar suas vantagens em comparação às abordagens PIC baseadas em malha, formalizando a incorporação de abordagens meshfree em modelos PIC. Acredita-se que o PIDC tenha vantagens em situações que envolvam distribuições de carga altamente não uniformes e regiões estreitas com forte variação de campo.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de plasmas é um assunto de grande interesse devido ao grande número de aplicações científicas e industriais que podem ser beneficiadas com o melhor conhecimento dos fenômenos relacionados a plasmas. As aplicações de tecnologias baseadas em plasmas abrangem um grande número de áreas de pesquisa [1][2][1][3][4][5][14], como por exemplo, no desenvolvimento de dispositivos que utilizam laser [4], tecnologias de processamento de materiais [3][8], propulsão iônica [15], fusão nuclear controlada [16], redução de arrasto aerodinâmico [14][22], dentre muitas outras.

A metodologia Particle-In-Cell (PIC) é uma das principais abordagens utilizadas para simulação de plasmas por ser bastante versátil e permitir o tratamento de diversos fenômenos peculiares a situações específicas de plasmas, como por exemplo, processos colisionais [3][6][8]. Nos modelos PIC o plasma é simulado por um grande número de partículas de simulação que o compõem, cujos movimentos são calculados individualmente após determinar-se a força que atua em cada partícula. Devido ao elevado número de partículas de simulação requeridos para adequada representação do plasma, os programas baseados em modelos PIC requerem bastante memória e considerável capacidade de processamento. Por isso, apesar destes modelos de simulação de partículas terem sido propostos no final da década de cinquenta [1][2], sua aplicação à maioria dos problemas de interesse sempre esteve condicionada à disponibilidade de arquiteturas computacionais de alto desempenho, como supercomputadores, os quais eram privilégio de poucos pesquisadores até o final da década de oitenta. Atualmente, a metodologia PIC vem sendo cada vez mais adotada graças à crescente disponibilidade de alta capacidade de memória e processamento a baixo custo experimentada nas últimas décadas. O advento de memórias de alta capacidade com acesso cada vez mais rápido e processadores cada vez mais velozes, hoje, permite que estes modelos computacionais sejam executados até mesmo em PC's comuns.

Essa grande e crescente disponibilidade de alta capacidade de processamento e memória tem permitido amplo e constante aprimoramento dos modelos PIC, viabilizando a incorporação de modelos e técnicas específicas que visam incluir maior detalhamento físico [8], bem como a proposição de abordagens que apresentam vantagens em situações específicas [23], reafirmando a versatilidade da metodologia PIC.

Os dispositivos baseados em plasma freqüentemente apresentam geometrias complexas, assim, programas que disponibilizam ferramentas baseadas em CAD (Computer Aided Design) são muito úteis e até mesmo imprescindíveis para adequada representação do modelo geométrico do dispositivo, e também para discretização do mesmo. Nestes casos a abordagem PIC acoplada ao método dos elementos finitos (MEF), proposta por Paes *et al* [20], é bastante adequada, uma vez que as células do modelo PIC coincidem com os elementos finitos provenientes do gerador de malha de Delaunay, permitindo que os contornos do dispositivo sejam bem representados.

Outra situação comumente presente em muitas aplicações de plasmas é a ocorrência de acúmulo de partículas em algumas regiões do domínio de simulação [7][23], que ocasionam fortes variações de campo. Duas dificuldades surgem neste cenário. Em primeiro lugar,

devido ao grande acúmulo de partículas, as células nestas regiões necessitam ser subdivididas para preservar as características do plasma que está sendo simulado pelo modelo PIC, e um processo de remalhamento local faz-se necessário. Esta tarefa, em determinadas circunstâncias, pode consumir tempo considerável de processamento, e dependendo da complexidade geométrica da região pode simplesmente resultar em uma discretização inapropriada, ou seja, com elementos distorcidos, podendo comprometer a acurácia da aproximação, especialmente em problemas tridimensionais. Em segundo lugar, dependendo da intensidade de variação do campo dentro das células nestas regiões de acúmulo, não é possível obter uma descrição correta da variação do campo dentro das células com uma aproximação por elementos finitos de primeira ordem, já que, neste caso, o campo no interior do elemento finito (célula) é aproximado por um valor médio constante. Considerando que o movimento das partículas é governado diretamente pelas componentes espaciais do campo elétrico, imprecisões neste cálculo podem levar a resultados incorretos no estudo de colimação de feixes de partículas [7]. Para lidar com estas dificuldades, propomos uma abordagem meshfree baseada na metodologia PIC e no método Element-Free Galerkin (EFG)[12]. Uma vez que a formulação do método EFG é isenta de malha, o acoplamento PIC-EFG não é direto como na abordagem PIC-MEF na qual basta que os elementos finitos provenientes da discretização do domínio coincidam com as células do modelo PIC. Em linhas gerais, pode-se dizer que a formulação resultante do acoplamento PIC-EFG, a qual chamamos Particle-In-Diffuse-Cell (PIDC), conduz a uma generalização do conceito geométrico de célula no modelo PIC, que formaliza uma classe de métodos PIC independentes de uma estrutura de células geometricamente regulares e não-intersectantes.

2. MODELOS PARTICLE-IN-CELL ELETROSTÁTICOS

Dada a variedade de interações físicas e químicas presentes em fina e larga escala em um plasma, torna-se difícil estabelecer uma definição para tal fenômeno em poucas palavras. Por isso, nesta seção, centramos nossa atenção em plasmas em equilíbrio, completamente ionizados e ainda restringimo-nos a aproximação eletrostática, ou seja, desprezamos o campo magnético auto-consistente proveniente do movimento das cargas que compõem o plasma.

2.1 Conceitos básicos de plasmas

É comum plasma ser definido como o quarto estado da matéria, muito embora a transição do estado gasoso para o de plasma ocorra com temperatura crescente, e portanto, não é considerada uma transição de fase no sentido termodinâmico. Se fornecermos energia suficiente a um gás molecular, o mesmo irá dissociar-se gradualmente em gás monoatômico e, posteriormente, à medida do aumento da energia termo-cinética dos átomos, os mesmos irão dissociar-se em íons e elétrons. Devido às forças de atração e repulsão eletrostáticas e à energia termo-cinética das partículas, inicia-se um movimento coletivo oscilatório dos elétrons (partículas mais leves) em torno dos íons. O estado de plasma é caracterizado pelo equilíbrio entre os potenciais que governam esse

comportamento coletivo e oscilatório, a saber, os potenciais de Coulomb e termo-cinéticos das partículas eletricamente carregadas que compõem o plasma. Em outras palavras, um plasma é basicamente uma substância macroscopicamente neutra que contém muitos elétrons livres e átomos e/ou moléculas ionizados que interagem coletivamente devido a ação do campo elétrico proveniente das cargas das partículas, o qual é chamado campo elétrico auto-consistente.

A amplitude das oscilações dos elétrons em torno dos íons está relacionada a um parâmetro muito importante para caracterização de um plasma, o chamado comprimento de Debye λ_D , dado por:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 \cdot K \cdot T}{n_e \cdot e^2} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, K é a constante de Boltzmann, T é a temperatura, n_e é a densidade de elétrons e e é a carga elementar do elétron.

O comprimento de Debye é definido como sendo a distância a partir da qual o campo gerado por uma partícula de referência eletricamente carregada é blindado, ou seja, as partículas situadas a partir desta distância não interagem individualmente com a partícula de referência, mas apenas coletivamente. Em outras palavras, se definirmos uma esfera de Debye em torno de uma partícula, isto é, uma esfera com raio igual a λ_D , então a contribuição individual dos campos elétricos produzidos por partículas que estiverem fora da esfera de Debye é muito pouco expressiva (negligenciável) comparada ao campo elétrico resultante que atua na partícula localizada no centro da esfera de Debye. Esse efeito, chamado de blindagem de Debye, é uma característica de todos os plasmas e constitui um dos principais fundamentos dos modelos de simulação de plasmas Particle-In-Cell.

Desde que o efeito de blindagem é resultado da interação coletiva das partículas localizadas dentro da esfera de Debye, o número de elétrons dentro da esfera de Debye deve ser suficientemente grande, ou seja, a distância média entre elétrons ($\approx n_e^{-1/3}$) dentro da esfera de Debye deve ser muito pequena comparada a λ_D , isto é,

$$n_e \cdot \lambda_D^3 \gg 1. \quad (2)$$

A partir desta quantidade define-se um parâmetro g conhecido como parâmetro de plasma,

$$g = \frac{1}{n_e \cdot \lambda_D^3}, \quad (3)$$

e a condição:

$$g \ll 1, \quad (4)$$

é conhecida como aproximação de plasma.

Em escala microscópica, os elétrons, partículas muito leves, oscilam coletivamente em torno dos íons, partículas bem mais pesadas, e à medida que se afastam, a força restauradora é fornecida pela interação de Coulomb íon-elétron que acelera rapidamente os elétrons tendendo a recuperar a neutralidade de carga local. No entanto, devido à sua inércia decorrente da alta energia termo-cinética, os elétrons ultrapassam a posição de equilíbrio, e então, gradativamente surge um campo elétrico com intensidade crescente atuando na direção contrária ao movimento dos elétrons. Estes movimentos oscilatórios repetem-se periodicamente, em consequência da transformação contínua de energia termo-cinética em energia potencial elétrica e vice-versa. A estas oscilações está associada a frequência elétron-plasma, dada por:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e \cdot e^2}{m_e \cdot \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Normalmente, esta é a mais alta frequência em um plasma e deve ser levada em conta no dimensionamento do incremento de tempo a ser usado na integração das equações de movimento.

2.2 Modelagem físico-matemática de plasmas não-colisionais

Considerando um plasma completamente ionizado e em equilíbrio, o ponto de partida para descrever sua evolução é usualmente a equação de Vlasov [2] [4], a qual pode ser obtida a partir da equação de Boltzmann feitas as considerações mencionadas ou a partir da equação de continuidade. Tomaremos o segundo caminho. Definimos $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ como sendo a função de distribuição das partículas de espécie j no espaço de fase. Por hipótese, não são criadas nem destruídas partículas de um ponto para outro no espaço de fase, de modo que a equação de continuidade deve ser satisfeita por $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}} \cdot f_j) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\dot{\mathbf{v}} \cdot f_j) = 0 \quad (6)$$

A partir das leis de movimento e da equação da força de Lorentz, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \frac{q_j}{m_j} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

onde q_j e m_j são a carga e a massa das partículas da j -ésima espécie, c é a velocidade da luz, e \mathbf{E} e \mathbf{B} são respectivamente os campos elétrico e magnético auto-consistentes. Substituindo as identidades dadas em (7) na equação (6), e desprezando as contribuições de força de natureza magnética, obtemos a equação de Vlasov para a aproximação

eletrostática:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (8)$$

Uma equação de Vlasov deve ser aplicada para cada espécie de partículas. No caso eletrostático, assumindo a inexistência de campos eletromagnéticos externamente aplicados, as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

As equações (8) e (9) aumentadas de condições de contorno apropriadas são suficientes para descrever a evolução de plasmas não-colisionais[4]. Os modelos PIC eletrostáticos resolvem indiretamente o conjunto de equações de Vlasov (8) para cada espécie, rastreando-se o movimento das partículas que compõem o plasma, cujos deslocamentos são calculados utilizando-se a segunda lei de Newton com a força dada pela referida equação de Lorentz e o campo elétrico dado por (9).

2.3 O ciclo de simulação de modelos PIC

Nos modelos PIC, o plasma é representado por um sistema de partículas eletricamente carregadas, macroscopicamente neutro, e adequadamente configurado para que represente corretamente as características físicas do plasma que se deseja simular, de acordo com o que foi discutido na seção 2.1. O que torna viável a aplicação desta técnica é o fato de estarmos interessados no estudo do comportamento coletivo das partículas que compõem o plasma, o que ocorre em uma escala espacial de ordem maior ou comparável ao comprimento de Debye[1][2][4]. Assim, as partículas usadas no modelo computacional para simulação do plasma não são cargas pontuais, mas são partículas de “tamanho finito” $a \approx \lambda_D$, também chamadas de macropartículas. Se o comprimento l das dimensões lineares do domínio de simulação forem grandes comparadas ao tamanho das partículas, $l \gg a$, então uma coleção de macropartículas se comporta aproximadamente da mesma forma que uma coleção de partículas pontuais, muito embora o modelo de macropartículas suprima flutuações em escala menor que o comprimento de Debye.

Como num sistema de partículas clássico, os movimentos das partículas são determinados a partir das forças que atuam sobre as mesmas. Por se tratar de partículas com carga, a força preponderante que governa o movimento das partículas é dada pela equação de força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), \quad (10)$$

assim, na aproximação eletrostática, a aceleração da j -ésima partícula é dada por:

$$\mathbf{a}_j = \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_j)). \quad (11)$$

Para determinarmos a aceleração da j -ésima partícula é necessário calcular o campo elétrico na posição da partícula j , o qual é governado pelas equações em (9). Estas equações diferenciais parciais (9) podem ser simplificadas, reduzindo-as à equação de Poisson. Utilizando-se a formulação do potencial escalar elétrico, $\mathbf{E} = -\nabla u$, e a relação constitutiva $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$, podemos escrever:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u(\mathbf{x})) = -4\pi\rho(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Agora que temos uma forma mais tratável para determinar o campo elétrico, é necessário determinarmos a função escalar $\rho(\mathbf{x})$ que representa a densidade de carga, para então resolvermos a equação anterior.

Vários critérios podem ser usados na construção dessa função densidade de carga. Nos modelos PIC construímos uma estrutura de células que nada mais é do que a decomposição do domínio de simulação em pequenas partes usualmente quadriláteros ou triângulos chamados de células, como uma malha, na qual os comprimentos lineares de cada célula são da ordem do comprimento de Debye. A carga de cada partícula dentro de uma célula é então distribuída, ou particionada, pelos vértices da célula que contém a partícula. As parcelas de carga de uma partícula que serão acumuladas em cada vértice da célula podem ser calculadas seguindo-se algum critério de distribuição/particionamento [2], escolhido arbitrariamente, desde que sejam respeitadas as seguintes restrições: 1) a soma das parcelas de uma carga acumuladas nos vértices deve ser igual ao valor original da carga da partícula, ou seja, não pode haver remoção nem adição de carga no sistema, e 2) quanto mais próximo estiver um vértice de uma dada partícula, maior será a parcela de carga nele acumulada.

O efeito da blindagem de Debye é incorporado no modelo de simulação ao estabelecer-se que as células devem ter dimensões lineares (arestas) da ordem do comprimento de Debye, de modo que, as contribuições locais das cargas dentro de uma célula são acumuladas apenas em pontos (vértices) que distam da ordem de λ_D .

Uma vez determinada a função densidade de carga $\rho(\mathbf{x})$, podemos resolver a equação de Poisson (12), e posteriormente, determinar a aceleração das partículas. A partir da aceleração das partículas podemos integrar as equações de movimento e determinar o avanço das partículas para um incremento de tempo dt . Dessa forma, podemos dividir o ciclo de simulação PIC em quatro estágios: 1. Distribuição das cargas nos vértices das células, 2. Resolução da equação de Poisson, 3. Interpolação do campo elétrico na posição das partículas, e 4. Cálculo dos deslocamentos das partículas a partir das acelerações, também chamado de Integração das equações de movimento.

3. O MODELO PARTICLE-IN-DIFFUSE CELL

Tradicionalmente os códigos de simulação de plasmas PIC empregam métodos de

diferenças finitas (MDF) ou espectrais (Transformada Rápida de Fourier - FFT) para resolução da equação de Poisson, e mais recentemente, foi proposto o acoplamento PIC-FEM [20] que incorpora o método dos elementos finitos no modelo PIC. Esta última abordagem vem sendo adotada por outros pesquisadores[7][9] dadas as conhecidas vantagens do MEF no que diz respeito ao tratamento de geometrias mais complexas, e acurácia no tratamento de equações diferenciais parciais elípticas e parabólicas quando comparado a MDF [5][20]. Tanto os métodos de diferenças finitas e dos elementos finitos quanto o método Element-Free Galerkin (EFG) são métodos classificados como métodos de partição de unidade [13]. Em linhas gerais, estes métodos diferem na forma com que a aproximação para a variável de estado é construída, resultando em diferentes acoplamentos com o modelo PIC.

No modelo de simulação PIC não-colisional, a estrutura de células desempenha dois papéis no ciclo de simulação: o de uma rede de pontos adequadamente espaçados para acúmulo das cargas das partículas, e de pontos de discretização (pontos nodais) para resolução da equação de Poisson. No caso de empregar-se MDF, os vértices das células são usados como pontos de discretização do domínio, e a informação de conectividade da estrutura de células é reutilizada para compor as moléculas computacionais na montagem do sistema de equações de diferenças finitas. Em se tratando do acoplamento PIC-FEM, as células do modelo PIC coincidem com os próprios elementos finitos, conseqüentemente, os vértices das células são os pontos nodais, e desse modo, a informação de conectividade da estrutura de células é totalmente aproveitada pelo método de resolução do campo.

Por outro lado, no método Element-Free Galerkin não são usadas estruturas geometricamente tão bem definidas na construção da aproximação, como as que são usadas no MEF e no MDF, ou seja, no método EFG não existem elementos finitos (elementos de malha topologicamente regulares, conexos e não intersectantes) nem moléculas computacionais que permitam uma reutilização ou mesmo uma associação direta com a estrutura de células do modelo PIC. Assim, propomos a formulação PIDC, na qual, a partir de um conjunto de pontos de discretização e de funções peso associadas a cada ponto, podemos realizar a simulação de plasmas sem a necessidade de gerar uma estrutura de células.

3.1. Formulação do método Element-Free Galerkin

Suponha que estamos interessados em construir uma função $u^h(\mathbf{x})$ em um domínio Ω , que aproxime a solução exata $u(\mathbf{x})$ de uma dada equação diferencial parcial. Esta aproximação é construída com base em um conjunto de N pontos nodais, $\mathbf{x}_i \in \Omega$, provenientes da discretização do domínio Ω . A cada ponto nodal \mathbf{x}_i é associada uma função de ponderação $w(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|) \equiv w_i(\mathbf{x})$, e um parâmetro de aproximação u_i , que controla a influência dos pontos nodais na aproximação, chamados de parâmetros nodais. Estes últimos são incógnitas a serem determinadas pelo sistema de equações discretas obtidas após a aplicação do método de Galerkin. As funções de ponderação podem ser escolhidas

arbitrariamente desde que sejam: não-negativas, decresçam monotonicamente à medida que $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|$ cresce, tenham norma unitária e suporte compacto. Temos empregado com sucesso [18] funções de ponderação singulares construídas a partir da função de Schwarz truncada:

$$w(r_i) = \begin{cases} \frac{r^2}{e^{r^2}-1}, & 0 \leq r < 1 \\ 0, & r \geq 1, \end{cases} \quad (13)$$

onde,

$$r_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| / d_{m_i}, \quad (14)$$

e d_{m_i} é o raio de influência. Diferentes topologias de domínios de influência podem ser definidos dependendo de como a função de ponderação for definida, por exemplo, circulares como definido em (13), e retangulares ao definirmos a função de ponderação por meio de um produto tensorial entre as componentes espaciais:

$$w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) = w(r_x) \cdot w(r_y), \quad (15)$$

em que definimos:

$$r_x = \|x - x_i\| / dm_{X_i} \quad \text{e} \quad r_y = \|y - y_i\| / dm_{Y_i}, \quad (16)$$

conforme ilustrado na Figura 1.

Considerando que freqüentemente teremos que resolver o problema de inclusão de um ponto de avaliação em domínios de influência, ou seja, determinar quais domínios de influência incluem um dado ponto de avaliação, usualmente domínios de influência retangulares são mais empregados por apresentarem menor complexidade computacional na determinação da inclusão.

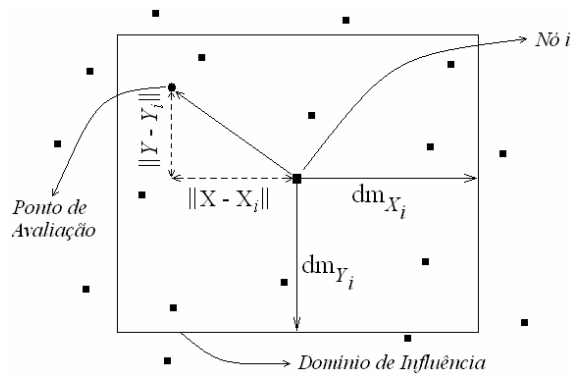


Figura 1. Domínio de influência nodal com topologia retangular.

O raio de influência define o alcance da função de ponderação, ou seja, a região em torno de um nó onde a função de ponderação é não nula. Essa região é chamada de domínio de influência nodal, uma vez que o parâmetro nodal associado a este ponto deverá ser levado em conta na aproximação em qualquer ponto de avaliação no interior desta região.

Podemos escrever uma aproximação local *moving least-squares* (MLS) para $u^h(\mathbf{x})$ da seguinte forma:

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \cdot a_j(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}), \quad (17)$$

onde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ forma uma base polinomial no espaço das coordenadas com cardinalidade igual a m , e os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ que minimizam o erro entre a aproximação local MLS e o parâmetro nodal u_i podem ser obtidos em qualquer ponto \mathbf{x} pela minimização da seguinte norma ponderada:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \cdot [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2. \quad (18)$$

O número de pontos nodais na vizinhança do ponto de avaliação \mathbf{x} cujas funções de ponderação $w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$ difere de zero é n , sendo que $n \ll N$. As funções de ponderação desempenham o principal papel na aproximação MLS, uma vez que a aproximação construída pelo método EFG herdará a maior continuidade dentre os monômios da base polinomial local $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ e a função de ponderação. Como a função de Schwarz é de classe de continuidade C^∞ , a aproximação fornecida pelo método EFG será de classe C^∞ . Isto significa que a variável de estado (potencial elétrico) e suas derivadas (campo elétrico) serão funções suaves de classe C^∞ , apesar de termos empregado uma base local MLS polinomial de primeira ordem. Diferentemente, quando empregamos elementos finitos de primeira ordem, utilizamos também uma base polinomial linear para construir a aproximação local, resultando, no interior dos elementos finitos, em uma aproximação linear para a variável de estado (potencial elétrico) e em um campo médio constante para sua primeira derivada (campo elétrico), ou seja, o potencial elétrico é aproximado por uma função linear (classe C^1) e o campo elétrico por uma função constante (classe C^0). Minimizando a norma J em (18) com respeito aos coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, e substituindo o valor encontrado para os mesmos na expansão local (17), chegamos a:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot u_i, \quad (19)$$

onde definimos as chamadas funções de forma $\phi_i(\mathbf{x})$:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_j^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji}, \quad (20)$$

e as matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{W} \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{W}, \quad (21)$$

sendo as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{W} definidas como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_1(\mathbf{x}_2) & \dots & p_1(\mathbf{x}_n) \\ p_2(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_2(\mathbf{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Como veremos adiante, além das funções de forma necessitaremos de suas derivadas para implementar as equações discretas obtidas pela aplicação do procedimento de Galerkin, as quais são dadas por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\mathbf{p}^T}{dx} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dx} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{B}}{dx}, \quad (23)$$

e analogamente para a derivada parcial com respeito à coordenada y . Resta dizer que as funções de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ satisfazem o critério de partição de unidade, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (24)$$

3.2. O particionamento das cargas no modelo PIDC: as células difusas

Como dissemos anteriormente, o particionamento das cargas é o primeiro estágio da simulação, e consiste em distribuir localmente a carga das partículas entre pontos cuja distância máxima com respeito à carga de referência seja da ordem do comprimento de Debye λ_D . Seja a partícula j uma partícula de referência, cuja carga deve ser particionada entre os nós que distam da ordem do comprimento de Debye, como ilustrado na Figura 2.

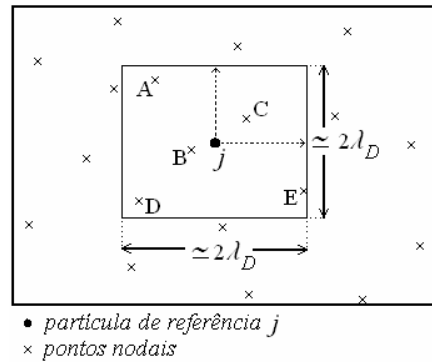


Figura 2. Pontos nodais que receberão contribuição de carga da partícula j .

No caso da ilustração anterior, a carga da partícula j deverá ser particionada pelos nós identificados pelas letras A, B, C, D e E. Evidentemente se fôssemos calcular a distância de cada nó à partícula de referência e depois compararmos ao comprimento de Debye isto seria muito caro computacionalmente. No entanto, se fizermos a associação inversa (Figura 3), isto é, se utilizarmos a informação dos domínios nodais para identificar as partículas que pertencem a estes domínios, tendo definido os raios de influência dos domínios nodais da ordem do comprimento de Debye, e ainda admitindo que os pontos nodais estão organizados em uma estrutura de dados que otimiza esta busca (seção 4.1), obteremos o resultado desejado com um custo computacional satisfatório. Dessa forma definimos a célula difusa que é a composta pelos nós que receberão as parcelas de carga de uma dada partícula, como ilustrado pelas Figuras 2 e 3. A nomenclatura que propomos, “células difusas”, foi inspirada no trabalho de Nayroles *et al* [10], precursor do método EFG [12].

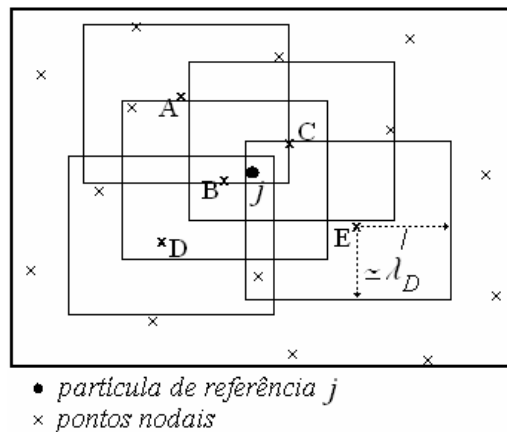


Figura 3. Domínios de influência dos nós A, B, C, D e E que incluem a partícula j : célula difusa.

Não é necessário calcular a distância entre a partícula j e os nós A, B, C, D e E para

determinarmos a parcela de carga que será acumulada em cada nó. Uma vez que as funções de forma ϕ_i satisfazem o critério de partição de unidade (24), e além disso, são decrescentes à medida que nos distanciamos do nó ao qual estão associadas, estas funções podem ser usadas como critério de particionamento de carga. Assim, tendo como referência o caso particular ilustrado nas figuras 2 e 3, ao multiplicarmos a equação (24) pela carga q_j da partícula j , obtemos:

$$\sum_{i \in \{A, B, C, D, E\}} \phi_i(\mathbf{x}_j) \cdot q_j = q_j, \quad (25)$$

onde cada termo do somatório $\phi_i(\mathbf{x}_j) \cdot q_j$ representa uma parcela da carga q_j a ser acumulada em cada nó $i \in \{A, B, C, D, E\}$, e \mathbf{x}_j é a posição da partícula j . Podemos reescrever (25) de forma mais geral para uma distribuição arbitrária de nós, e para uma j -ésima partícula com carga q_j localizada na posição \mathbf{x}_j :

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_j) \cdot q_j = q_j, \quad (26)$$

onde os nós i localmente numerados de $1..n$ cujos domínios de influência incluem a partícula j , ou seja, os nós para os quais $w_i(\mathbf{x}_j) \neq 0$.

A carga total Q_i acumulada no i -ésimo nó é dada por:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{p_n} \phi_i(\mathbf{x}_j) \cdot q_j, \quad (27)$$

onde cada termo da soma representa a contribuição de carga de cada partícula $j = 1..p_n$ contidas no domínio de influência do nó i .

3.3. A discretização da equação de Poisson

Uma vez determinada a função densidade de carga $\rho(\mathbf{x}_i)$, $i=1..N$, em cada ponto de discretização do domínio. Considerando que ε não varia no domínio e redefinindo $\rho(\mathbf{x}_i) = -4\pi\rho(\mathbf{x}_i)$, de acordo com (12) o potencial elétrico pode ser calculado resolvendo-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad (28)$$

$$u(\mathbf{x}) = \phi_{Dir}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{Dir} \subset \Gamma, \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_{Neu}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{Neu} \subset \Gamma, \quad (30)$$

onde Γ representa o contorno do domínio, $\Gamma_{Dir} \cap \Gamma_{Neu} = \{ \}$ e $\Gamma_{Dir} \cup \Gamma_{Neu} = \Gamma$.

Como as funções de forma ϕ_i construídas pelo método EFG são linearmente independentes e conseqüentemente formam uma base $\{\phi_i\}$, podemos usar a expansão (19) para aplicar o procedimento de Galerkin ao problema de valor de contorno dado pelas equações (28) a (30), e assim, pode-se obter o seguinte conjunto de equações discretas:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (31)$$

sendo, \mathbf{K} a chamada matriz de rigidez, \mathbf{b} o vetor de fontes e \mathbf{u} o vetor de incógnitas (parâmetros nodais), dados por:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\omega, \quad (32)$$

$$b_j = \int_{\Omega} \phi_j \cdot \rho_j d\omega, \quad (33)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_N]^T. \quad (34)$$

As funções de forma $\phi_j(\mathbf{x})$ que aparecem em (33) são dadas em (20), e suas derivadas parciais com respeito às componentes espaciais presentes nos gradientes da equação (32) são as apresentadas em (23). Essas equações integro-diferenciais podem ser resolvidas por quadratura de Gauss. A ordem do sistema de equações (31) é $N \times N$, em que N é o número de pontos nodais. Uma boa descrição da aplicação do método EFG ao problema de valor de contorno (28) a (30) pode ser encontrada em [18].

3.4. A interpolação do campo

Neste estágio, temos calculado os valores dos parâmetros nodais que definem a aproximação para a variável de estado de acordo com (19), e como usamos a formulação do potencial escalar elétrico para reduzir as equações de Maxwell à equação de Poisson, nossa variável de estado é o potencial elétrico que está relacionada ao campo elétrico por $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x})$. Dessa forma, partindo da expansão para o potencial elétrico (19), o campo elétrico que atua nas posições das partículas, \mathbf{x}_p , pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_p) = -\nabla u(\mathbf{x}_p) \approx -\sum_{i=1}^n u_i \cdot \nabla \phi_i(\mathbf{x}_p) \quad (35)$$

em que u_i são os parâmetros nodais, $\phi_i(\mathbf{x}_p)$ são as funções de forma calculadas na posição da partícula \mathbf{x}_p , e a soma $i=1..n$ diz respeito à numeração local dos nós cujos domínios de influência incluem o ponto \mathbf{x}_p . É importante dizer que o conjunto de nós que participam desta aproximação é o mesmo conjunto que, no estágio de particionamento de carga, recebeu as contribuições de carga da partícula localizada em \mathbf{x}_p , ou seja, os pontos nodais que definem a célula difusa. Esta informação é importante para otimizar o estágio

de interpolação do campo.

3.5. A integração das equações de movimento

Considerando a aproximação eletrostática e a ausência de campos eletromagnéticos externamente aplicados, a única força que atua nas partículas eletricamente carregadas é devido ao campo elétrico autoconsistente, que acelera cada partícula de acordo com (11). A partir da aceleração que atua nas partículas, podemos calcular o deslocamento das mesmas em um dado incremento de tempo Δt , o qual deve ser suficientemente pequeno para resolver adequadamente a frequência elétron-plasma (5). Usualmente, este incremento de tempo é escolhido como $\Delta t = 0.2 \cdot \omega_{pe}^{-1}$.

Vários métodos podem ser usados para resolução das equações diferenciais ordinárias que governam o movimento das partículas, como o método de Euler [17]. Empregamos um algoritmo *leap-frog* de segunda ordem [2][20][21], cujas equações de diferenças são dadas por:

$$\mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} = \mathbf{v}^{(n-\frac{1}{2})} + \mathbf{a}^{(n)} \cdot \Delta t, \quad (36)$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{v}^{(n+\frac{1}{2})} \cdot \Delta t. \quad (37)$$

Dadas condições iniciais apropriadas para o sistema de partículas que representa o plasma a ser simulado, conforme discutido na seção 2.1, temos todos os elementos necessários para calcular a evolução do sistema. Após este último estágio do ciclo de simulação no qual avançamos as partículas no espaço de fase, a configuração espacial de cargas das partículas terá mudado, e então, reiniciamos o ciclo de simulação, realizando o particionamento das cargas (seção 3.2), a resolução do campo para a nova função densidade de carga (seção 3.3), a interpolação do campo na posição das partículas (seção 3.4), o avanço das partículas no espaço de fase (seção 3.5), e assim sucessivamente.

É interessante observar que, a menos que seja necessário mudar a configuração nodal durante o ciclo de simulação, a matriz de rigidez \mathbf{K} , equação (32), permanece inalterada durante toda a simulação, e portanto é calculada uma única vez. Neste caso, apenas o vetor de fontes \mathbf{b} (33) necessita ser recalculado a cada iteração no tempo.

4. MODELO COMPUTACIONAL

Nesta seção daremos uma breve descrição da primeira versão do código que implementa o método PIDC, bem como, faremos considerações sobre possíveis otimizações a serem testadas nas próximas versões do programa.

4.1. Procedimentos computacionais

A geração dos pontos de discretização pode ser realizada empregando-se diversos algoritmos. Considerando que recentemente trabalhamos com o acoplamento PIC-FEM e que implementamos o código PIDC na mesma plataforma de software, o sistema

LEVSOFTE [24], foi bastante conveniente utilizarmos o gerador de malha triangular de Delaunay já implementado no sistema, por duas razões: os vértices dos triângulos nos servem como pontos de discretização e, adicionalmente, os triângulos podem ser usados para implementar a quadratura de Gauss, necessária para integração das equações íntegro-diferenciais (32) e (33) provenientes da discretização da equação de Poisson. Evidentemente, as restrições impostas à qualidade/regularidade dos triângulos gerados pelo algoritmo de Delaunay são incomparavelmente mais fracas por não comprometerem a aproximação construída pelo método EFG, já que neste método, as informações da conectividade nodal é fornecida pelas funções de ponderação, diferentemente do que ocorre no MEF.

Por outro lado, apesar das informações de conectividade e vizinhança provenientes da malha de Delaunay não serem necessárias na formulação do EFG, elas são bastante úteis para otimização da busca por nós localizados em uma dada vizinhança, graças às estruturas de dados e funcionalidades implementadas no LEVSOFTE para armazenamento e acesso aos elementos da malha. A este tipo de estrutura de dados otimizada que nos referimos na seção 3.2, no contexto das células difusas.

O cálculo dos valores das funções de forma e de suas derivadas foram implementados no código PIDC pelos algoritmos derivados da chamada abordagem de consistência proposta por Breitkopf *et al* [11], que além de mais eficientes do ponto de vista computacional são também mais robustos do ponto de vista numérico por evitarem a inversão direta da matriz **A**, equações (20) a (23). Além disso, este algoritmo permite que os valores das funções de forma e de suas derivadas sejam calculadas de forma otimizada, o que é feito reaproveitando-se os cálculos de matrizes intermediárias usadas para computar os valores das funções de forma no cálculo dos valores de suas derivadas, já que ambos valores são necessários para montagem do sistema de equações íntegro-diferenciais (31) relativas à equação de Poisson. É importante dizer que, para montagem do referido sistema de equações, as funções de forma e suas derivadas são calculadas nos pontos de integração de Gauss.

Outra estrutura de dados pode ser implementada para otimização, ou reaproveitamento, de código. No estágio de particionamento de carga, necessitamos dos valores das funções de forma calculados nas posições das partículas para realizar o particionamento das cargas entre os nós que compõem as respectivas células difusas (26). Para este fim, utilizamos o referido algoritmo da abordagem de consistência [11]. Como mencionamos anteriormente, este algoritmo nos retornará, além dos valores das funções de forma, os valores de suas derivadas calculados nos mesmos pontos. Apesar dos valores das derivadas representarem um cálculo desnecessário para o estágio de particionamento de carga, estes valores podem ser armazenados neste estágio da simulação e depois utilizados no estágio de interpolação do campo elétrico (35), uma vez que os valores das derivadas das funções de forma também devem ser calculados nas posições das partículas que permanecem inalteradas entre o estágio 1 e o estágio 3.

5. RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção apresentamos resultados preliminares da aplicação do modelo PIDC para simulação de um plasma composto por duas espécies de partículas: 180000 elétrons e 180000 protons a uma temperatura inicial de, respectivamente, 10000 K e 1000 K, totalizando 360000 partículas de simulação. Em nosso código, ambas espécies de partículas são deslocadas ao longo da simulação, apesar de que em muitos códigos para simulação de plasmas apenas os elétrons serem deslocados e as partículas mais pesadas serem mantidas fixas. As partículas foram distribuídas uniformemente no espaço e suas velocidades foram amostradas obedecendo-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

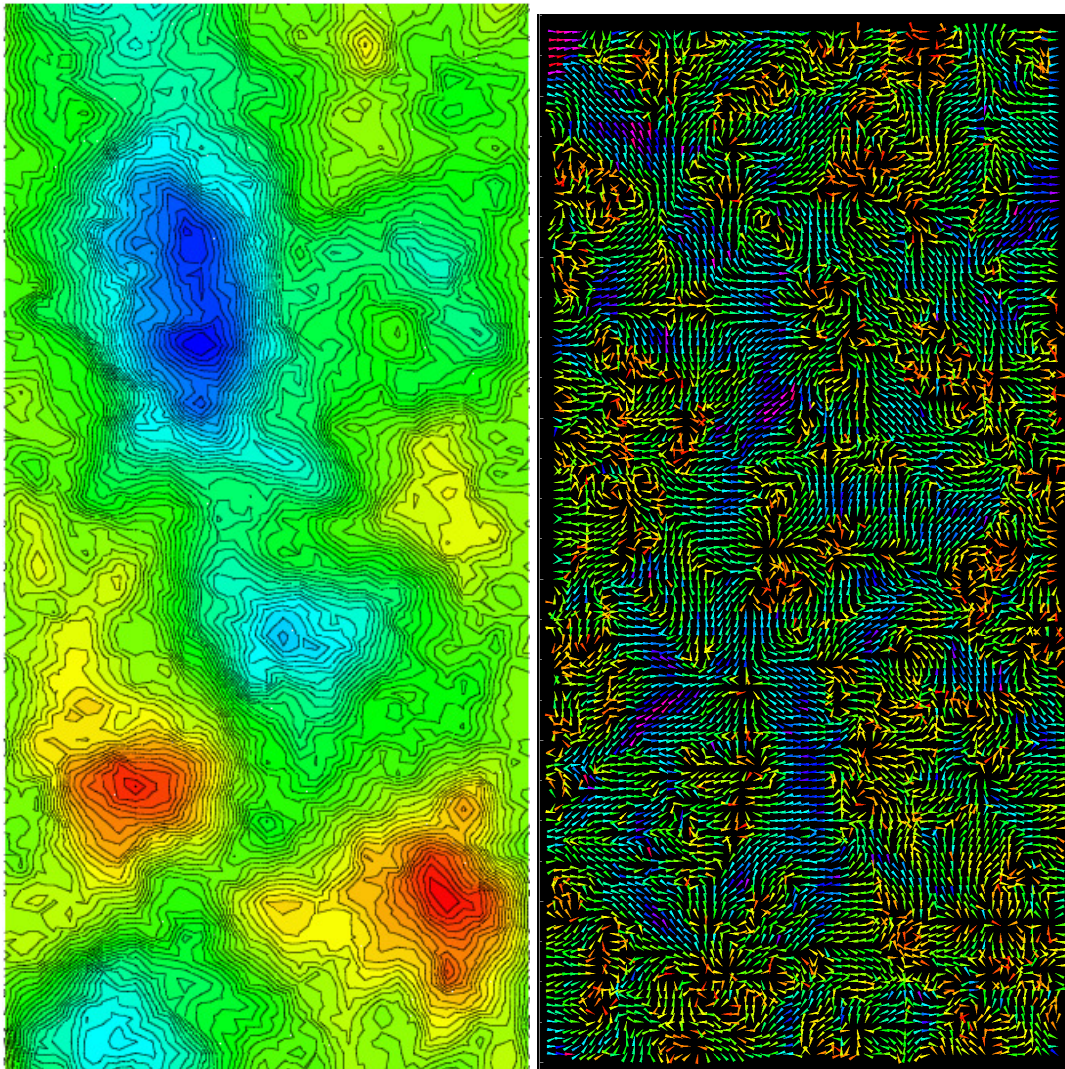


Figura 4. Linhas equipotenciais elétricas (esquoda) e visualização vetorial do campo elétrico (direita).

O domínio de simulação é um retângulo com dimensões da ordem de cem vezes o comprimento de Debye. O volume das células difusas é aproximadamente igual ao volume de uma esfera de Debye, já que os raios dos domínios de influência dos pontos nodais foram definidos aproximadamente iguais ao comprimento de Debye.

Não foram consideradas fontes externas de campo na simulação, desta forma, a única força atuando no movimento das partículas é proveniente do campo elétrico autoconsistente do plasma. Além disso, a fim de preservar o número total de partículas ao longo da simulação, foram impostas condições de contorno periódicas em todo o contorno do domínio, ou seja, se uma partícula abandona o domínio de simulação, outra partícula com exatamente as mesmas características é inserida no domínio pelo lado oposto ao lado de saída.

As linhas equipotenciais elétricas e uma visualização vetorial do campo elétrico ao final da primeira iteração ($t_1 = 0.2 \cdot \omega_{pe}^{-1} = 5 \cdot 10^{-12} s$) são apresentados na Figura 4.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho uma abordagem meshfree para simulação de plasmas é proposta baseada no modelo Particle-In-Cell e no método Element-Free Galerkin, a qual chamamos de Particle-In-Diffuse-Cell. As principais motivações para o estudo desta abordagem são: 1) o alto grau de continuidade da aproximação fornecida pelo método EFG, o que permite descrever com maior precisão bruscas variações de campo elétrico em regiões estreitas, como as chamadas “bainhas de plasma” ou *plasma sheaths*, 2) maior facilidade de implementação e menor custo computacional de algoritmos auto-adaptativos para tratamento de problemas que envolvem regiões dinâmicas de acúmulo de cargas e situações envolvendo distribuições altamente não-uniformes, e 3) maior facilidade para tratar domínios que envolvem geometrias complexas, principalmente tridimensionais.

REFERÊNCIAS

- [1] J.M. Dawson e A.T. Lin, Particle Simulation: Handbook of Plasma Physics, Elsevier Science Publishers, Vol. 2, (1984).
- [2] C.K. Birdsall e A.B. Langdon, Plasma Physics Via Computer Simulation, McGraw Hill, (1985).
- [3] M.A. Lieberman e A.J. Lichtenberg, Principles of plasma discharges and materials processing, John Wiley and Sons, Inc., (1994).
- [4] W.L. Kruer, The Physics of Laser Plasma Interactions, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1988).
- [5] T. Tajima, Computational Plasma Physics with Applications to Fusion and Astrophysics, Addison-Wesley Publishing Company, (1989)
- [6] S. Cheng, M. Santi, M. Celik, M. Martinez-Sanches e J. Peraire, “Hybrid PIC-DSMC simulation of a Hall thruster plume on unstructured grids”, Computer Physics

- Communications Vol. 164, pp. 73-79, (2004).
- [7] S.K. Nam, V.M. Donnelly e D.J. Economou, “Particle-In-Cell simulation of ion flow through a hole in contact with plasma”, *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 33 (2), pp. 232-233, (2005).
 - [8] R. Hrach, D. Sedláč, M. Vichera, J. Simek, “Self-consistent modelling of plasma–solid interaction in electronegative plasmas”, *Thin Solid Films*, (2003).
 - [9] R. Kafafy e J. Wang, “A Hybrid Grid Immersed Finite Element Particle-in-Cell Algorithm for Modeling Spacecraft–Plasma Interactions”, *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 34 (5), pp.2114-2124, (2006).
 - [10] B. Nayroles, G. Touzot e P. Villon, “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational Mechanics* Vol. 10, pp. 307-318, (1992).
 - [11] P. Breilkopf, A. Rassineux, G. Touzot e P. Villon, “Explicit form and efficient computation of MLS shape functions and their derivatives”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 48, pp. 451-466, (2000).
 - [12] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, “Element Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 37, pp. 229-256, (1994).
 - [13] J.M. Melenk e I. Babuska, “The partition of unit finite element method: Basic theory and applications”, *Comput. Meth. Appl. Engn.*, Vol. 139, pp. 289-314, (1996).
 - [14] J.S. Shang, “Recent research in magneto-aerodynamics”, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 37, pp. 1-20, (2001).
 - [15] L. Garrigues, A. Heron, J.C. Adam e J.P. Boeuf, “Hybrid and particle in cell model of a stationary plasma thruster”, *Plasma Sources Sci. Tech.*, Vol. 9, pp. 219-226, (2000).
 - [16] K.M. Rantamäki, T.J.H Pättikangas, S.J. Karttunen et al., “Particle-in-cell simulations of parasitic absorption of lower hybrid power in edge plasmas of tokamaks”, *Plasma Phys. Control. Fusion*, Vol. 41, pp. 1125-1133, (1999).
 - [17] M.H. Lean, “Particle simulation of ion cloud in a magnetic field”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 34 (5), pp. 3122-3125, (1998).
 - [18] G.N. Marques, J.M. Machado, S.L.L. Verardi, S. Stephany e A.J. Preto, “Interpolating EFGM for computing continuous and discontinuous electromagnetic fields”, *International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, artigo aceito, (2007).
 - [19] G.N. Marques, J.M. Machado, S.L.L. Verardi, e Y. Shyou, “An application of the element-free Galerkin method with interpolating shape functions to the analysis of electromagnetic fields in inhomogeneous media”, In: *Proc. IEEE 15th Conf. Comp. Electromag.Fields, 2005, COMPUMAG, China (2005)*, Vol. II, pp. 68-69.
 - [20] A.C.J. Paes, N.M. Abe, V.A. Serrão, “Simulation of plasmas with electrostatic PIC models using the finite element method”, *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 33, pp.411-417, (2003).
 - [21] A. Passaro, N.M Abe, A.C.J Paes, G.N. Marques, A.J. Preto, S. Stephany, A Parallel and Object-Oriented Plasma Simulation Code Base don Electrostatic PIC Model and the Finite Element Method. P.R.M. Lyra, S.M.B.A. Silva, F.S. Magnani, L.J.N.

- Guimarães, L.M. Costa e E.P. Junior eds. XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasil, 2004, CILAMCE, Recife (2004), s/p.
- [22] M.A.S. Minucci, P.G.P. Toro, A.C. Oliveira e J.B. Chanes Jr., “Multi laser pulse investigation of the DEAS concept in hypersonic flow”, In: Proc. 2nd. Int. Symp. On Beamed Energy Propulsion, Sendai, (2003).
- [23] G. Lapenta, Automatic adaptation in mono- and multi-dimensional PIC codes, In Proceedings of ISSS-7, 2005, Los Alamos (2005), s/p.
- [24] N.M. Abe, A. Passaro, M.A.R. Franco et al., Um Sistema de Software para Análise de Dispositivos e Componentes de Óptica Integrada, Fibras Ópticas e Microondas, In: V Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Brasil, 2002, CBMAG, (2002), s/p.